Date

2007　東大数学　文系第2問

k回目の操作後の2^k個の円の半径を、それぞれ

$r_1\ r_2\ r_3 \cdots\ r_{2^k}$ とおく。

k+1回目の操作を行うと、2^{k+1}個の円の半径は、

$rr_1,\ (1-r)r_1,\ rr_2,\ (1-r)r_2 \cdots,\ rr_{2^k},\ (1-r)r_{2^k}$

である。

(1) k回目の操作後の円周の和は、

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \cdots 2\pi r_{2^k} = 2\pi(r_1+r_2+\cdots+r_{2^k})$$

k回後

k+1回目の操作後の円周の和は、

$$2\pi r r_1 + 2\pi(1-r)r_1 + 2\pi r r_2 + 2\pi(1-r)r_2 + \cdots 2\pi r\cdot r_{2^k} + 2\pi(1-r)r_{2^k}$$

同じ

$$= 2\pi(r_1+r_2+\cdots r_{2^k})$$ k+1回後

となり、k回目の操作後と同じ値である。

よって、はじめの円周の値を求めればよいので、$\underline{2\pi}$ //

(2) 1回目の操作後に得られる円の半径は

rと$1-r$であるので、

2回目の操作後に得られる円の半径は

r^2と$r(1-r)$と$(1-r)r$と$(1-r)^2$である。

よって、面積の和は

$$\pi(r^2)^2+\pi\{r(1-r)\}^2+\pi\{(1-r)\cdot r\}^2+\pi\{(1-r)^2\}^2$$

$$=\pi\{r^4+2r^2(1-r)^2+(1-r)^4\}$$

$$=\pi\{r^2+(1-r)^2\}^2=\pi(2r^2-2r+1)^2.$$

(3)

補

1回目の操作後の円の面積は

$$\pi r^2+\pi(1-r)^2=\pi(2r^2-2r+1)$$

2回目の操作後には $\pi(2r^2-2r+1)^2$

よって、公比が$2r^2-2r+1$の等比数列かも。

k回目の操作後の円の面積は

$$\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2+\cdots\ \pi r_{2^k}^2$$

$$=\pi(r_1^2+r_2^2+\cdots r_{2^k}^2)=S_k$$ とおく。

k+1回目の操作後の円の面積は、

$$\pi(r\cdot r_1)^2+\pi\{(1-r)r_1\}^2+\pi(r\cdot r_2)^2+\pi\{(1-r)r_2\}^2+\cdots+\pi(r\cdot r_{2^k})^2+\pi\{(1-r)r_{2^k}\}^2$$

$$=\pi r_1^2(2r^2-2r+1)+\pi r_2^2(2r^2-2r+1)+\cdots+\pi r_{2^k}^2(2r^2-2r+1)$$

$$=(2r^2-2r+1)(\pi r_1^2+\pi r_2^2+\cdots\ \pi r_{2^k}^2)$$

$$=(2r^2-2r+1)S_k$$

公比が$2r^2-2r+1$と証明された。

よって、$S_{k+1}=(2r^2-2r+1)S_k$であり、

初項$S_1=\pi r^2+\pi(1-r)^2=\pi(2r^2-2r+1)$

公比$2r^2-2r+1$の等比数列である。

よって $S_n=\pi(2r^2-2r+1)\times(2r^2-2r+1)^{n-1}$

$$=\underline{\pi(2r^2-2r+1)^n}$$ //